GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICĂ FĂRĂ PROFESOR

CLASA A X – A

PROFIL INFORMATICĂ

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021

CUPRINS

1. Mulțimi de numere
1.1 Mulțimea numerelor reale
1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție Fiind dat numărul $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ și $n \in \mathbf{N}$, avem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ și $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple. a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

2. Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg.

a) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

c) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $(a^m)^n = a^{mn}$.

d) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

e) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemple. a) $2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-3+4} = 2^1$;

b) $3^5 : 3^{-3} = 3^{5-(-3)} = 3^{5+3} = 3^8$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}}$.

d) $(4^{-2})^3 = 4^{(-2)\cdot 3} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6}$; e) $(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2}$.

b) Probleme rezolvate

1. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-1} + (2^{-1})^{-2} +$
$+(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)(-1)} + 2^{(-1)(-2)} + 2^{(-1)(-3)} = 2^1 + 2^2 + 2^3 =$
$= 2 + 4 + 8 = 14$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.
Analog $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$ și produsul este: $2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{64}{27} = \frac{32}{3}$.

3. Ordonați crescător numerele: $2^{1+2+\cdots+15}$ și $3^{1+2+\cdots+13}$.

Soluție. Avem: $2^{1+2+\cdots+15}=2^{\frac{15\cdot 16}{2}}=2^{120}=\left(2^3\right)^{40}=8^{40}$.

Analog $3^{1+2+\cdots+13}=3^{\frac{13\cdot 14}{2}}=3^{91}>9^{40}>8^{40}\Rightarrow 3^{1+2+\cdots+13}>2^{1+2+\cdots+15}$.

4. Ordonați descrescător numerele:

$$(-1)^1;\ (-2)^2;\ (-3)^3;\ (-4)^4;\ (-5)^5.$$

Soluție. Avem: $(-1)^1=-1;\ (-2)^2=2^2=4;\ (-3)^3=$ $=-3^3=-27;\ (-4)^4=4^4=256;\ (-5)^5=-5^5=-3125$.
Ordinea descrescătoare este: $256, 4, -1, -27, -3125$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că suma lor este egală cu: **11** **12** **13** **14** **15**

2. Calculați $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ și arătați că produsul lor este egală cu: **121** **125** **136** **144** **156**

3. Calculați $(-3)^4$ și $(-4)^3$ și arătați că suma lor este egală cu:

15 **16** **17** **18** **19**

4. Calculați $N=2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^{-7}$ și arătați că este egal cu:

5 **6** **7** **8** **9**

5. Calculați $N=2^{-1}\cdot 2^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{15}$ și arătați că este egal cu:

16 **24** **32** **40** **48**

6. Calculați $N=2^{-1}:2^{-2}+2^{-3}:2^{-4}+2^{-5}:2^{-6}$ și arătați că este egal cu:

4 **5** **6** **7** **8**

7. Calculați $N=3^1:3^{-1}+4^1:4^{-1}+5^1:5^{-1}$ și arătați că este egal cu:

40 **50** **60** **70** **80**

8. Calculați $N = 2:2^2 + 4:4^2 + 8:8^2$ și arătați că este egal cu:

$\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$ $\frac{9}{8}$

9. Calculați: $N = (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3}$ și arătați că este egal cu:

−2 **−1** **0** **1** **2**

10. Calculați: $N = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că este egal cu:

−7 **−6** **−5** **−6** **0**

11. Calculați: $N = \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{2^3}{2^4} + \frac{2^4}{2^5}$ și arătați că este egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

12. Calculați: $N = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

60 **61** **62** **63** **64**

13. Calculați: $N = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{50}$ și arătați că este egal cu:

−2 **−1** **0** **1** **2**

14. Calculați: $N = (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{75}$ și arătați că este egal cu:

−2 **−1** **0** **1** **2**

15. Calculați: $N = ((-1)^1)^2 \cdot ((-1)^2)^3 \cdot \dots \cdot ((-1)^{25})^{26}$ și arătați că este egal cu:

−2 **−1** **0** **1** **2**

16. Calculați: $N = ((-1)^1)^3 + ((-1)^3)^5 \cdot \dots \cdot ((-1)^{15})^{17}$ și arătați că este egal cu:

−10 **−8** **−6** **0** **8**

17. Arătați că numerele: $\frac{2^7}{2^8} + \frac{2^9}{2^{10}}$ și $\frac{3^2}{3^3} + \frac{3^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7}$ sunt egale cu:

0 **1** **2** **3** **4**

1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv. Proprietăți ale radicalilor.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Fiind dat $a \in \mathbf{R}, a \geq 0$ și $n \in \mathbf{N}$, numim **radical de ordinal** n al numărului a, unicul număr real pozitiv care ridicat la puterea n să dea valoarea a.

Notăm radicalul de ordin n al numărului real a cu $\sqrt[n]{a}$ și vom studia în continuare cazurile $n = 2, 3$, adică $\sqrt{a}$ și $\sqrt[3]{a}$.

Radicalul de ordin 2 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^2 = a$.

Radicalul de ordin 3 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^3 = a$.

Exemple. a) $\sqrt{4} = 2$, deoarece $2^2 = 4$ sau 2 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 = 4$.

b) $\sqrt[3]{27} = 3$, deoarece $3^3 = 27$ sau 3 este rădăcina pozitivă a ecuație $x^3 = 27$.

2. Proprietățile radicalului de ordin 2 dintr-un număr real și pozitiv.

a) Dacă $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

b) Dacă $a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

c) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$.

d) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.

e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$.

f) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

g) Dacă $a > 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

h) Dacă $a < 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

i) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$.

j) Dacă $a \geq 0, b \geq 0$ avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ - comparare.

k) Dacă $a \in \mathbf{R}$ și $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ - raționalizare numitor.

l) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

m) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

Exemple. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$;

c) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

3. Proprietățile radicalului de ordin 3 dintr-un număr real.

a) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

b) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

c) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.

d) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$.

e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{a}\right)^m = \sqrt[3]{a^m}$.

f) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ - raționalizare numitor.

g) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

i) h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Exemple. a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$; b) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5 \cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{5-2} = \frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2 \cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{2-3}$.