

LIBRIS

We know
books

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**SĂ ÎNVĂȚĂM
MATEMATICĂ
FĂRĂ PROFESOR
CLASA A X – A
PROFIL INFORMATICĂ**

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021**

CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi de numere	5	183
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	183
1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.	5	183
1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv.		
Proprietăți ale radicalilor	8	184
1.1.3 Puteri cu exponent rațional. Aproximări		
raționale pentru numere iraționale sau reale.		
Puteri cu exponent real	15	185
1.1.4 Noțiunea de logaritm. Proprietăți ale		
logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operația de		
logaritmare	19	186
1.2 Mulțimea numerelor complexe	25	188
1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică.		
Conjugatul unui număr complex. Operații cu		
numere complexe	25	188
1.2.2 Interpretarea geometrică a operațiilor		
de adunare și scădere a numerelor complexe și a		
înmulțirii acestora cu un număr real	32	189
1.2.3 Rezolvarea de ecuații în \mathbb{C}	36	190
1.2.4 Numere complexe sub formă trigono-		
metrică	40	191
1.2.5 Rădăcinile de ordin n ale unui număr		
complex. Ecuații binome	46	193
1.3 Teste grilă de autoevaluare	50	195
Testul 1	50	195
Testul 2	51	196
Testul 3	52	197
Testul 4	53	198
2. Funcții și ecuații	54	199
2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate.		
Funcții inversabile	54	199
2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția		
radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de		
ordinal 2 sau 3	60	200

2.3	Funcția exponențială. Ecuații exponențiale.	66	203
2.4	Funcția logaritmică. Ecuații logaritmice.	71	205
2.5	Funcții trigonometrice directe și inverse . . .	76	207
2.5.1	Funcții trigonometrice directe	76	207
2.5.2	Funcții trigonometrice inverse	84	209
2.6	Ecuații trigonometrice	92	210
2.7	Teste grilă de autoevaluare	102	213
	Testul 1	102	213
	Testul 2	103	215
	Testul 3	104	216
	Testul 4	105	217
	Testul 5	106	218
3.	Metode de numărare	107	219
3.1	Metoda inducției matematice	107	219
3.2	Mulțimi finite ordonate	110	220
3.3	Permutări	112	220
3.4	Aranjamente	115	221
3.5	Combinări	118	222
3.6	Binomul lui Newton	122	224
3.7	Teste grilă de autoevaluare	127	226
	Testul 1	127	226
	Testul 2	128	226
	Testul 3	129	227
	Testul 4	130	228
4.	Matematici financiare	131	229
4.1	Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA	131	229
4.2	Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice. Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziție	137	231
4.3	Elemente de probabilități	143	232
4.3.1	Evenimente. Operații cu evenimente	143	232
4.3.2	Probabilități. Proprietăți ale probabilităților	147	233
4.3.3	Probabilități condiționate. Evenimente independente	150	234
4.3.4	Schema lui Poisson. Schema lui Bernoulli	153	235
4.3.5	Variabile aleatoare	155	236

4.4	Teste grilă de autoevaluare	159	237
	Testul 1	159	237
	Testul 2	160	237
5.	Geometrie	161	238
5.1	Reper cartezian în plan. Coordonate carteziane în plan. Distanța dintre două puncte în plan.	161	238
5.2	Coordonatele unui vector. Coordonatele sumei vectoriale. Coordonatele produsului dintre un vector și un număr real.	164	239
5.3	Ecuții ale dreptei în plan. Coliniaritate, concurență	168	240
5.4	Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan. Calcul de distanțe și arii	173	240
5.5	Teste grilă de autoevaluare	179	242
	Testul 1	179	242
	Testul 2	180	243
	Testul 3	181	244
	Testul 4	182	245

1. Mulțimi de numere

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție Fiind dat numărul $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ și $n \in \mathbf{N}$, avem

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}} \text{ și } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemple. a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

2. Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg.

a) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

c) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $(a^m)^n = a^{mn}$.

d) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

e) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemple. a) $2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-3+4} = 2^1$;

b) $3^5 : 3^{-3} = 3^{5-(-3)} = 3^{5+3} = 3^8$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}}$.

d) $(4^{-2})^3 = 4^{(-2) \cdot 3} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6}$; e) $(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2}$.

b) Probleme rezolvate

1. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-1} + (2^{-1})^{-2} + (2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)(-1)} + 2^{(-1)(-2)} + 2^{(-1)(-3)} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

Analog $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$ și produsul este: $2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{64}{27} = \frac{32}{3}$.

3. Ordonăți crescător numerele: $2^{1+2+\dots+15}$ și $3^{1+2+\dots+13}$.

Soluție. Avem: $2^{1+2+\dots+15} = 2^{\frac{15 \cdot 16}{2}} = 2^{120} = (2^3)^{40} = 8^{40}$.

Analog $3^{1+2+\dots+13} = 3^{\frac{13 \cdot 14}{2}} = 3^{91} > 9^{40} > 8^{40} \Rightarrow 3^{1+2+\dots+13} > 2^{1+2+\dots+15}$.

4. Ordonăți descrescător numerele:

$$(-1)^1; (-2)^2; (-3)^3; (-4)^4; (-5)^5.$$

Soluție. Avem: $(-1)^1 = -1$; $(-2)^2 = 2^2 = 4$; $(-3)^3 = -3^3 = -27$; $(-4)^4 = 4^4 = 256$; $(-5)^5 = -5^5 = -3125$.

Ordinea descrescătoare este: 256, 4, -1, -27, -3125.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că suma lor este egală cu: **11 12 13 14 15**

2. Calculați $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ și arătați că produsul lor este egală cu: **121 125 136 144 156**

3. Calculați $(-3)^4$ și $(-4)^3$ și arătați că suma lor este egală cu:

15 16 17 18 19

4. Calculați $N = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-7}$ și arătați că este egal cu:

5 6 7 8 9

5. Calculați $N = 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{15}$ și arătați că este egal cu:

16 24 32 40 48

6. Calculați $N = 2^{-1} \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^{-4} + 2^{-5} \cdot 2^{-6}$ și arătați că este egal cu:

4 5 6 7 8

7. Calculați $N = 3^1 \cdot 3^{-1} + 4^1 \cdot 4^{-1} + 5^1 \cdot 5^{-1}$ și arătați că este egal cu:

40 50 60 70 80

8. Calculați $N = 2:2^2 + 4:4^2 + 8:8^2$ și arătați că este egal cu:
 $\frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{9}{8}$

9. Calculați: $N = (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

10. Calculați: $N = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că este egal cu:

-7 -6 -5 -6 0

11. Calculați: $N = \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{2^3}{2^4} + \frac{2^4}{2^5}$ și arătați că este egal cu:

0 1 2 3 4

12. Calculați: $N = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

60 61 62 63 64

13. Calculați: $N = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{50}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

14. Calculați: $N = (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{75}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

15. Calculați: $N = ((-1)^1)^2 \cdot ((-1)^2)^3 \cdot \dots \cdot ((-1)^{25})^{26}$ și arătați că este egal cu:

-2 -1 0 1 2

16. Calculați: $N = ((-1)^1)^3 + ((-1)^3)^5 \cdot \dots \cdot ((-1)^{15})^{17}$ și arătați că este egal cu:

-10 -8 -6 0 8

17. Arătați că numerele: $\frac{2^7}{2^8} + \frac{2^9}{2^{10}}$ și $\frac{3^2}{3^3} + \frac{3^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7}$ sunt egale cu:

0 1 2 3 4

1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv.

Proprietăți ale radicalilor.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Fiind dat $a \in \mathbf{R}, a \geq 0$ și $n \in \mathbf{N}$, numim **radical de ordinal n** al numărului a , unicul număr real pozitiv care ridicat la puterea n să dea valoarea a .

Notăm radicalul de ordin n al numărului real a cu $\sqrt[n]{a}$ și vom studia în continuare cazurile $n = 2, 3$, adică \sqrt{a} și $\sqrt[3]{a}$.

Radicalul de ordin 2 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^2 = a$.

Radicalul de ordin 3 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^3 = a$.

Exemple. a) $\sqrt{4} = 2$, deoarece $2^2 = 4$ sau 2 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 = 4$.

b) $\sqrt[3]{27} = 3$, deoarece $3^3 = 27$ sau 3 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 = 27$.

2. Proprietățile radicalului de ordin 2 dintr-un număr real și pozitiv.

a) Dacă $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

b) Dacă $a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

c) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$.

d) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.

e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$.

f) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$.

g) Dacă $a > 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

h) Dacă $a < 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

i) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$.

j) Dacă $a \geq 0, b \geq 0$ avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ - comparare.

k) Dacă $a \in \mathbf{R}$ și $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ - raționalizare numitor.

l) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ - raționalizare numitor.

m) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$ - raționalizare numitor.

Exemple. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$;

c) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

3. Proprietățile radicalului de ordin 3 dintr-un număr real.

a) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

b) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

c) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.

d) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$.

e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow (\sqrt[3]{a})^m = \sqrt[3]{a^m}$.

f) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ - raționalizare numitor.

g) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}$ - raționalizare numitor.

h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a - b}$ - raționalizare numitor.

i) h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Exemple. a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$; b) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{2 - 3}$.